

STRUTTURE GENERALI DI CONVERGENZA PER FILTRI, CONNESSIONI DI GALOIS E "ATOMI" PER STRUTTURE INIZIALI

Rolf D. Brandt (L'Aquila) 

Mathematics Subject Classification (1985 Revision): 54B 30;
06 A 10, 06 A 15, 06 A 23, 18 A 30, 18 A 40, 18 B 30, 18 B 99, 54 A 05,
54 B 05, 54 B 10


Key words and phrases: galois connections, topological categories, initial and final structures, theory of filters, initial filters, filter-convergence-spaces, bi- and mono-co-reflective subcategories

Abstract: This paper is mainly written to give an introduction to the theory of filter-convergence-spaces and therefore written in an "introductory style". Due to friendly requests of many Italian colleagues and to learn the language it is written in Italian. The text is in principle an extract of [Br 81] but contains also some new results.

After demonstrating lifts of any Galois connection (chapter 1), summarizing the main results of theory of filters (chapter 2), and introducing the category of filtered sets, we introduce in chapter 3 general filter-convergence-spaces. Our main concern thereafter will be on initial structures and, as a generalization of "that the filters converging in the productspace of topological spaces are in principle productfilters", we show that initial filters are "atoms" for the initial structures for almost any kind of filter-convergence. Main applications of this might be "looking for initially dense classes" in convergence-(sub)categories which is useful for proving heredity and/or cartesian closedness (though for being a quasitopos) and also useful for characterizing closure operators in the sense of [Gi 86] which is strongly related to "searching for (sub)categories" being not co-wellpowered. Finally we show that even the initial filters have "atoms" i.e. we construct a category wherein these "atoms" are created.

0 - INTRODUZIONE

Questo lavoro contiene una introduzione alla teoria di convergenza per filtri ma tutte le costruzioni possono essere verificate anche per gli spazi di convergenza per successioni o per successioni nel senso di Moore-Smith.

 : Questo lavoro è stato scritto nell'anno accademico 1986/87 all'Aquila dove l'autore ha tenuto seminari sull'argomento. I risultati nuovi sono stati esposti dall'autore nel marzo 1987 a Parma, al Convegno Nazionale di Topologia, ed a Trieste.

L'autore ringrazia molto Marco e Sandro Salomone per le correzioni dell'italiano, inoltre tutta la famiglia Salomone per la sua ospitalità, Eraldo Giuli e Anna Tozzi per le revisioni delle bozze ma anche per aver dato la possibilità di lavorare all'Università dell'Aquila ed infine i colleghi dell'Università di Trieste, in particolare Gino Tironi, per l'invito a tenere una conferenza e pubblicare questo lavoro.

In particolare dimostriamo che le strutture iniziali hanno "atomi" per quasi tutte le categorie di convergenza. Chiamiamo questi "atomi" 'filtri iniziali' e perciò introduciamo la categoria degli insiemi filtrati e delle funzioni filtrocontinue e ricapitoliamo anche le proprietà principali dei filtri.

Oltre a ciò vediamo che i filtri iniziali hanno "atomi" e che lo strumento principale in questo lavoro sono i sollevamenti delle connessioni di Galois che pertanto vengono studiate all'inizio.

Alla fine menzioniamo qualche applicazione degli "atomi" per strutture iniziali.

1 - CONNESSIONI DI GALOIS

Cominciamo con le notazioni e le definizioni utili nel seguito:

1.1. Definizione: Sia (P, \leq) un insieme parzialmente ordinato (i.e., " \leq " è una relazione riflessiva, transitiva e antisimmetrica in un insieme P).

Definiamo per ogni $x \in P$ e ogni $A \subseteq P$

$\uparrow_P A := \{x \in P : \exists a \in A \text{ con } a \leq x\}$ e

$x^\uparrow := \uparrow_P \{x\}$ (dualmente si definiscono $\downarrow_P A$ e x^\downarrow).

$Ss(P) := \{A \subseteq P : \uparrow_P A = A\}$ è l'insieme di tutti i settori superiori e

$Ssp(P) := \{x^\uparrow : x \in P\}$ il sottoinsieme di $Ss(P)$ di tutti i settori superiori principali (per i settori inferiori si definiscono dualmente $Si(P)$ e $Sip(P)$).

La definizione seguente viene da J. Schmidt [Schm 53, §8]:

1.2. Definizione: Siano (P, \leq) e (Q, \leq') insiemi parzialmente ordinati, f una funzione da P in Q (= $f : P \rightarrow Q$) e $g : Q \rightarrow P$ un'altra funzione. La coppia (f, g) è detta una connessione di Galois tra (P, \leq) e (Q, \leq') se e solo se per ogni $x \in P$ e ogni $y \in Q$ si ha

$$f(x) \leq' y \Leftrightarrow x \leq g(y).$$

In tal caso f è detto partner a sinistra (e g partner a destra) della connessione.

1.3. Osservazioni:

1. Questo tipo di connessione di Galois è equivalente al sistema di assiomi definito da Benado [Ben 49]:

- i) f è monotona (i.e., $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq' f(x')$)
- ii) g è monotona
- iii) $\forall x \in P$ si ha $x \leq g(f(x))$ i.e., $g \circ f$ è estensiva
- iv) $\forall y \in Q$ si ha $f(g(y)) \leq' y$ i.e., $f \circ g$ è intensiva

2. Gli assiomi iii) e iv) danno quella che in letteratura viene chiamata connessione di "tipo misto". Se in uno dei due insiemi ordinati (P, \leq) o (Q, \leq') si cambia l'ordine in quello duale si hanno le connessioni di Galois del "tipo involuppo" oppure del "tipo nucleo".

3. Le connessioni di Galois danno precisamente le agglunzioni se (P, \leq) e (Q, \leq') vengono considerati come categorie piccole.

1.4. Esempi:

1. Ogni funzione di insiemi $f : X \rightarrow Y$ definisce una connessione di Galois tra i reticoli completi $(\wp(X), \subseteq)$ e $(\wp(Y), \subseteq)$ dove $\wp(X)$ ($\wp(Y)$) è l'insieme delle parti di X (Y) e " \subseteq " l'usuale inclusione.

Ponendo $\wp(f)(A) := f(A) := \{ f(a) : a \in A \}$ per ogni $A \subseteq X$

(cioè $\wp : \underline{\text{INS}} \rightarrow \underline{\text{INS}}$ è il funtore potenza dove $\underline{\text{INS}}$ è la categoria degli insiemi e delle funzioni, allora $\wp(X) = \{ A : A \subseteq X \} \cong 2^X$) e ponendo $f^{-1}(B) := \{ x \in X : f(x) \in B \}$ per ogni $B \subseteq Y$ abbiamo che (f, f^{-1}) è una connessione di Galois tra i reticoli $(\wp(X), \subseteq)$ e $(\wp(Y), \subseteq)$.

2. Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ una funzione; per ogni insieme X $(\text{TOP}(X), \subseteq)$ denota il reticolo completo delle topologie su X , ordinato dall'usuale inclusione. Definiamo $f_{\text{in}} : \text{TOP}(Y) \rightarrow \text{TOP}(X)$ l'applicazione che ad ogni $\sigma \in \text{TOP}(Y)$ associa $f_{\text{in}}(\sigma)$, la topologia iniziale indotta in X dalla situazione iniziale $(f : X \rightarrow (Y, \sigma))$;

definiamo $f_{\text{fin}} : \text{TOP}(X) \rightarrow \text{TOP}(Y)$ che ad ogni $\tau \in \text{TOP}(X)$ associa $f_{\text{fin}}(\tau)$, la topologia finale indotta in Y dalla situazione finale $(f : (X, \tau) \rightarrow Y)$. Allora $(f_{\text{in}}, f_{\text{fin}})$ costituisce una connessione di Galois fra i reticoli $(\text{TOP}(Y), \subseteq)$ e $(\text{TOP}(X), \subseteq)$.

1.5. Osservazioni:

Con le notazioni in 1.2. si ha:

1. Per f sono equivalenti:

- i) f è un partner a sinistra.
- ii) f è monotona e per ogni $y \in Q$ esiste in P un x massimale con $f(x) \leq y$.
- iii) $\forall y \in Q \exists x \in P$ con $f^{-1}(y^\perp) = x^\perp$ i.e., l'immagine inversa di un settore inferiore è un settore inferiore: $f^{-1}(\text{Sip}(Q)) \subseteq \text{Sip}(P)$ dove

$$f^{-1}(\mathfrak{a}) := \{ f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{a} \} \text{ per ogni sistema } \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{P}(Q).$$

Se (P, \leq) e (Q, \leq') sono reticoli completi ognuna delle precedenti condizioni è equivalente a:

iv) per ogni $A \subseteq P$ si ha $f(\bigvee A) = \bigvee' f(A)$ i.e., f è permutabile con gli estremi superiori cioè preserva i colimiti nel linguaggio categorico.

I'. Dualmente per g sono equivalenti:

- i') g è un partner a destra.
- ii') g è monotona e per ogni $x \in P$ esiste in Q un y minimale con $x \leq g(y)$.
- iii') $g^{-1}(\text{Ssp}(P)) \subseteq \text{Ssp}(Q)$ (l'immagine inversa di un settore superiore è un settore superiore).

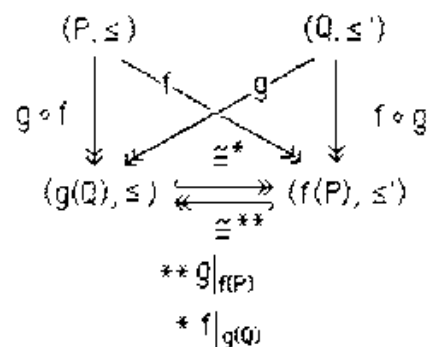
Se (P, \leq) e (Q, \leq') sono reticoli completi ognuna delle precedenti condizioni è equivalente a:

iv) per ogni $B \subseteq Q$ si ha $g(\bigwedge' B) = \bigwedge g(B)$ i.e., g è permutabile con gli estremi inferiori cioè preserva i limiti nel linguaggio categorico.

In iii) e iii') l'esistenza è in più unica (v. 1.5.6. e corollario 1.6.).

Combinando le osservazioni 1.5.1. e I'. si hanno le seguenti proprietà per la connessione (f, g) :

2. $g \circ f$ è un operatore inviluppo (estensivo, monotono e idempotente).
3. $f \circ g$ è un operatore nucleo (intensivo, monotono e idempotente).
4. $f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$.
5. $f|_{g(Q)}$ e $g|_{f(P)}$ sono isomorfismi uno inverso dell'altro fra $(g(Q), \leq)$ e $(f(P), \leq')$ dove " $|_{\dots}$ " denota la restrizione delle funzioni.
6. f è univocamente definita da g e viceversa.



Se (P, \leq) e (Q, \leq') sono reticoli completi si ha in più:

$$7. \forall y \in Q : g(y) = \bigvee \{ x \in P : f(x) \leq' y \} .$$

$$8. \forall x \in P : f(x) = \bigwedge' \{ y \in Q : x \leq g(y) \} .$$

1.6. Corollario: Per funzioni $f : P \rightarrow Q$ e $g : Q \rightarrow P$ sono equivalenti:

a) (f, g) è una connessione di Galois

b) per ogni $x \in P : g^{-1}(x^\uparrow) = f(x)^\uparrow$

c) per ogni $y \in Q : f^{-1}(y^\downarrow) = g(y)^\downarrow$

Questo corollario ha una conseguenza importante che è il teorema centrale di questo paragrafo:

1.7. Teorema: Per insiemi parzialmente ordinati (P, \leq) e (Q, \leq') e funzioni $f : P \rightarrow Q$ e $g : Q \rightarrow P$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) (f, g) è una connessione di Galois fra (P, \leq) e (Q, \leq') .

b) f e g sono monotone e $(\uparrow_P \circ g|_{Ss(Q)}, \uparrow_Q \circ f|_{Ss(P)})$ è una connessione di Galois fra $(Ss(Q), \subseteq)$ e $(Ss(P), \subseteq)$.

b') f e g sono monotone e $(\downarrow_Q \circ f|_{Si(P)}, \downarrow_P \circ g|_{Si(Q)})$ è una connessione di Galois fra $(Si(P), \subseteq)$ e $(Si(Q), \subseteq)$.

Dimostrazione:

Oltre alle condizioni a), b) e b') abbiamo le condizioni equivalenti:

$$c) \forall A \subseteq P, \forall B \subseteq Q : g(B) \subseteq \uparrow_P A \Leftrightarrow B \subseteq \uparrow_Q f(A) .$$

$$c') \forall A \subseteq P, \forall B \subseteq Q : f(A) \subseteq \downarrow_Q B \Leftrightarrow A \subseteq \downarrow_P g(B) .$$

d) f e g sono monotone e per ogni settore superiore $A \in Ss(P)$ si ha $g^{-1}(A) = \uparrow_Q f(A)$.

d') f e g monotone e $\forall B \in Si(Q) : f^{-1}(B) = \downarrow_P g(B)$.

"a) \Rightarrow d)": La monotonia segue dalla definizione; per ogni settore superiore A si ha $A = \uparrow_P A = \bigcup \{ a^\uparrow : a \in A \}$ e in più

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(\bigcup \{ a^\uparrow : a \in A \}) = \bigcup \{ g^{-1}(a^\uparrow) : a \in A \} = \bigcup \{ f(a)^\uparrow : a \in A \}$$

(Corollario 1.6.b); da cui abbiamo $g^{-1}(A) = \bigcup \{ f(a)^\uparrow : a \in A \} = \uparrow_Q f(A)$.

"d) \Rightarrow b)": L'esempio 1.4.1. dice che (g, g^{-1}) è una connessione di Galois fra $(\wp(Q), \subseteq)$ e $(\wp(P), \subseteq)$, allora le composizioni con \uparrow_P e \uparrow_Q ("fare i settori superiori") implicano la condizione b).

"b) \Rightarrow c)": Per definizione si hanno $A = \uparrow_P A$ e $B = \uparrow_Q B$; il resto è ovvio perchè $g(B) \subseteq \uparrow_P A \Leftrightarrow \uparrow_P g(\uparrow_Q B) \subseteq \uparrow_P A$ (monotonia di g)

e $B \subseteq \uparrow_Q f(A) \Leftrightarrow \uparrow_Q B \subseteq \uparrow_Q f(\uparrow_P A)$ (monotonia di f).

"c) \Rightarrow a)": Per ogni $x \in P$ e ogni $y \in Q$ è vero che $f(x) \leq y \Leftrightarrow \{y\} \subseteq f(x)^{\uparrow}$ ($f(x)^{\uparrow} = \uparrow_Q f(\{x\})$) $\Leftrightarrow (g(\{y\}) = \{g(y)\}) \subseteq \uparrow_P \{x\}$ ($= x^{\uparrow}$) $\Leftrightarrow x \leq g(y)$.

"a) \Rightarrow d') \Rightarrow b') \Rightarrow c') \Rightarrow a)" dualmente. □

Questo teorema è valido anche per gli insiemi quasi ordinati (i.e., " \leq " è una relazione riflessiva e transitiva) e così rimangono valide quasi tutte le altre affermazioni (o almeno possono essere generalizzate).

Il fatto più importante è che si possono fare arbitrari sollevamenti delle connessioni di Galois. Analisi più generali di sollevamenti su completamenti di insiemi parzialmente ordinati si trovano in [Schm 74, §4].

1.8. Applicazioni:

1. Sia $(Pi(X), \subseteq) := (Ss(\mathcal{F}(X), \subseteq), \subseteq)$ il reticolo completo di tutte le pile in X (= settori superiori in $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$). Dal Teorema 1.7.b) e dall'esempio 1.4.1. segue che per ogni insieme X e Y e ogni funzione $f: X \rightarrow Y$ $(\uparrow_{\mathcal{F}(X)} \circ f^{-1}|_{Pi(Y)}, \uparrow_{\mathcal{F}(Y)} \circ f|_{Pi(X)})$ è una connessione di Galois fra $(Pi(Y), \subseteq)$ e $(Pi(X), \subseteq)$.

2. La monotonia di una funzione f tra insiemi parzialmente ordinati (P, \leq) e (Q, \leq') , che sono in più (\wedge -semi-)reticoli, è equivalente alla condizione $f(x \wedge y) \leq' f(x) \wedge' f(y)$. Questo dice, per un \wedge -ideale in (P, \leq) , che l'immagine mediante f è una base di un \wedge -ideale in (Q, \leq') . Allora 1.7.b) è vero anche per le restrizioni sugli \wedge -ideali.

Prendendo insiemi X e Y questo implica, per i reticoli $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ e $(\mathcal{F}(Y), \subseteq)$, che $(\uparrow_{\mathcal{F}(X)} \circ f^{-1}|_{\mathcal{F}(Y)}, \uparrow_{\mathcal{F}(Y)} \circ f|_{\mathcal{F}(X)})$ è una connessione di Galois fra $(\mathcal{F}(Y), \subseteq)$ e $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$, dove per ogni insieme X $\mathcal{F}(X)$ denota l'insieme di tutti i filtri in X . Approfondiremo questo esempio nel prossimo paragrafo.

Se scriviamo f^* per $\uparrow_{\mathcal{F}(Y)} \circ f|_{\mathcal{F}(X)}$ e f^{-*} per $\uparrow_{\mathcal{F}(X)} \circ f^{-1}|_{\mathcal{F}(Y)}$ e facciamo l'altro sollevamento di quella connessione (f^{-*}, f^*) abbiamo:

3. Per ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ la coppia $(\uparrow_{f(Y)} \circ f^*, \uparrow_{f(X)} \circ f^{*-1})$ è una connessione di Galois fra i reticoli completi dei settori superiori $(Ss(f(X)), \subseteq)$ e $(Ss(f(Y)), \subseteq)$.

Nota: Applicando 1.4.1. a $f^* : f(X) \rightarrow f(Y)$ abbiamo che (f^*, f^{*-1}) è una connessione di Galois fra $(\mathcal{F}(f(X)), \subseteq)$ e $(\mathcal{F}(f(Y)), \subseteq)$ (v. lemma 3.3.) e lo sono anche le restrizioni fra $(Ss(f(X)), \subseteq)$ e $(Ss(f(Y)), \subseteq)$, allora per settori superiori si ha $f^{*-1} = \uparrow_{f(X)} \circ f^*$. Useremo questo in 4.3. per trovare "atomi" delle strutture iniziali nelle categorie di convergenza.

La dualizzazione dà i seguenti:

4. Per ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ la coppia $(\downarrow_{f(Y)} \circ f|_{Pi^{op}(Y)}, \downarrow_{f(X)} \circ f^{-1}|_{Pi^{op}(Y)})$ è una connessione di Galois fra $(Pi^{op}(X), \subseteq)$ e $(Pi^{op}(Y), \subseteq)$ dove $Pi^{op}(X)$ denota l'insieme di tutte le co-pile (pile duali) in X .

5. In analogia a 1.8.2. le immagini dei v -ideali mediante una funzione monotona fra (v -semi-)reticoli sono almeno basi per v -ideali. Per i reticoli $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ e $(\mathcal{F}(Y), \subseteq)$ questo implica che

$(\downarrow_{f(Y)} \circ f|_{f^{op}(X)}, \downarrow_{f(X)} \circ f^{-1}|_{f^{op}(Y)})$ è una connessione di Galois fra $(f^{op}(X), \subseteq)$ e $(f^{op}(Y), \subseteq)$, dove per ogni insieme X , $f^{op}(X)$ denota l'insieme di tutti i filtri duali in X (δ è un filtro duale \Leftrightarrow i) $\delta \neq \emptyset$ ii) $A \in \delta, B \in \delta \Rightarrow A \cup B \in \delta$ e iii) $A \in \delta, B \subseteq A \Rightarrow B \in \delta$). L'isomorfismo tra filtri e filtri duali è "fare i complementi": δ è un filtro duale $\Leftrightarrow \delta^{op} = \{X \setminus D : D \in \delta\}$ è un filtro.

Quest'ultimo esempio è anche vero per le restrizioni sugli spazi bornologici nel senso di [H-N 70] (una bornologia in X è un filtro duale in X che è più fine del filtro duale caratteristico dei sottoinsiemi finiti in X).

6. Ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ fra spazi bornologici (X, \mathcal{B}) e (Y, \mathcal{B}') è limitata se e solo se $f(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}'$ il che è equivalente a $\mathcal{B} \subseteq \downarrow_{f(X)} f^{-1}(\mathcal{B}')$.

Nota: Nella letteratura gli \wedge -ideali si chiamano anche "filtri" e i v -ideali solo "ideali".

Letteratura per S 1: [Ben 49], [Bir 40], [Bir 67], [BJ 72], [Br 81], [Eve 44], [GHKLMS 80], [Gr 60], [HS 79], [McL 71], [Nö 48], [Ore 42], [Ore 44], [Pic 52], [Rig 48], [Schm 53] e [Schm 74].

2 - LA CATEGORIA DEGLI INSIEMI FILTRATI E DELLE FUNZIONI FILTROCONTINUE

Prima di introdurre la "convergenza per filtri" studiamo qualche proprietà utile e importante dei filtri.

2.1. Definizione: Per ogni insieme X gli \cap -ideali nel reticolo $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ sono detti filtri in X .

Dunque $\varphi \subseteq \mathcal{F}(X)$ è un filtro in X se e solo se

- i) $\varphi \neq \emptyset$
- ii) $F \in \varphi, G \in \varphi \Rightarrow F \cap G \in \varphi$
- iii) $F \in \varphi, A \subseteq X, F \subseteq A \Rightarrow A \in \varphi$

$IF(X) := \{ \varphi \subseteq \mathcal{F}(X) : \varphi \text{ filtro in } X \}$ denota l'insieme di tutti i filtri in X ,

$IU(X) := \{ \nu \subseteq \mathcal{F}(X) : \nu \text{ ultrafiltro in } X \}$ denota l'insieme dei co-atomi del reticolo $(IF(X), \subseteq)$ cioè gli \cap -ideali massimali in $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$

e per ogni filtro $\varphi \in IF(X)$

$\Omega(\varphi) := \{ \nu \in IU(X) : \varphi \subseteq \nu \}$ denota l'insieme di tutti gli ultrafiltri che sono più fini di φ .

Le seguenti affermazioni si trovano per esempio in [Schm 52] e [Schm 53] ma possono essere generalizzate per gli \wedge -ideali come p.e. in 1.8.2.:

2.2. Osservazioni (fondamentali per il reticolo $(IF(X), \subseteq)$):

1. Il reticolo $(IF(X), \subseteq)$ è completo e in più si ha che gli estremi inferiori sono precisamente le intersezioni in $(\mathcal{F}(\mathcal{F}(X)), \subseteq)$:

Per un sottoinsieme dell'insieme dei filtri $\Gamma \subseteq IF(X)$ si ha

$$\bigwedge \Gamma = \bigwedge \{ \varphi : \varphi \in \Gamma \} = \bigcap \{ \varphi : \varphi \in \Gamma \} = \{ \bigcup \{ F_\varphi : \varphi \in \Gamma \} : \forall \varphi \in \Gamma, F_\varphi \in \varphi \}.$$

2. L'estremo superiore di un sottoinsieme $\Gamma \subseteq IF(X)$ si ottiene chiudendo l'unione, che è fatta in $(\mathcal{F}(\mathcal{F}(X)), \subseteq)$, rispetto ad intersezioni finite in $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$:

$$\begin{aligned} \bigvee \Gamma &= \bigvee \{ \varphi : \varphi \in \Gamma \} = (\bigcup \{ \varphi : \varphi \in \Gamma \})_{\mathcal{F}} = \\ &= \{ \bigcap \{ F_\gamma : \gamma \in \Gamma^f \} : \Gamma^f \subseteq \Gamma, \Gamma^f \text{ finita e } \forall \gamma \in \Gamma^f, F_\gamma \in \gamma \}. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}(X)$ è il più grande e $\{X\}$ il più piccolo filtro in X : $\bigvee /F(X) = \mathcal{F}(X)$, $\bigcap /F(X) = \{X\}$. Con l'usuale convenzione (per reticoli completi) abbiamo per $\emptyset \subseteq /F(X)$: $\bigvee \emptyset = \{X\}$ e $\bigcap \emptyset = \mathcal{F}(X)$.

4. $(/F(X), \subseteq)$ è distributivo: Per ogni $\varphi, \mathcal{F}, \eta \in /F(X)$ si ha $\varphi \vee (\mathcal{F} \cap \eta) = (\varphi \vee \mathcal{F}) \cap (\varphi \vee \eta)$ e per il duale si ha in più $\varphi \cap (\bigvee \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Gamma\}) = \bigvee \{\varphi \cap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \Gamma\}$ per ogni $\varphi \in /F(X)$ e ogni $\Gamma \subseteq /F(X)$, allora $(/F(X), \subseteq)$ è un "frame" o un "locale".

Nota: Per gli λ -ideali questa osservazione è valida se il reticolo di base è distributivo.

5. $\varphi \in /U(X) \Leftrightarrow \forall A \subseteq X$ si ha $A \in \varphi$ o $X \setminus A \in \varphi$.

6. Il reticolo $(/F(X), \subseteq)$ è coatomico, cioè $\forall \varphi \in /F(X)$ si ha $\varphi = \bigcap \Omega(\varphi)$.

2.3. Definizione:

- Se X è un insieme e φ un filtro in X , la coppia (X, φ) è detta insieme filtrato.
- Siano (X, φ) e (Y, \mathcal{F}) insiemi filtrati. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è detta φ - \mathcal{F} -continua (o più generalmente "filtrocontinua") se per ogni insieme $G \in \mathcal{F}$ si ha che $f^{-1}(G) \in \varphi$ (cioè $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \varphi$).

Scriviamo $[\alpha] := \bigcap_{\varphi \in \mathcal{F}(X)} \alpha$ per ogni $\alpha \subseteq \mathcal{F}(X)$ ($\alpha \neq \emptyset$), $[A] := \{[A]\} (= A^*)$ per ogni $A \subseteq X$ e $x^* := \{[x]\}$ per ogni $x \in X$. Così per insiemi filtrati (X, φ) e (Y, \mathcal{F}) e funzioni $f : X \rightarrow Y$ si ha $f^*(\varphi) = [f(\varphi)]$ e $f^{-*}(\mathcal{F}) = [f^{-1}(\mathcal{F})]$.

In generale un sistema $\sigma \subseteq \mathcal{F}(X)$ è detto base di un filtro $\varphi \Leftrightarrow [\sigma] = \varphi$ ed è detto sottobase di $\varphi \Leftrightarrow [\sigma^{\wedge}] = \varphi$ dove " \wedge " denota la chiusura di σ rispetto alle intersezioni finite.

Il seguente lemma segue in modo evidente dalla connessione di Galois (f^{-*}, f^*) di 1.8.2.:

2.4. Lemma: Per insiemi filtrati (X, φ) e (Y, \mathfrak{z}) , funzioni $f : X \rightarrow Y$, sottobasi σ di \mathfrak{z} e basi β di φ le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) $f : (X, \varphi) \rightarrow (Y, \mathfrak{z})$ è filtrocontinua
- b) $f^{-1}(\mathfrak{z}) \subseteq \varphi$
- c) $\mathfrak{z} \subseteq f^*(\varphi)$
- d) $f^{-1}(\sigma) \subseteq \varphi$
- e) $\sigma \subseteq f^*(\varphi)$
- f) $\sigma \subseteq [f(\beta)]$

La connessione (f^{-1}, f^*) implica inoltre:

2.5. Corollario: Con le notazioni di 2.4. si ha:

1. $f^{-1}(f^*(\varphi)) \subseteq \varphi$; "=" se f iniettiva.
2. $\mathfrak{z} \subseteq f^*(f^{-1}(\mathfrak{z}))$; "=" se f suriettiva.
3. f^* preserva gli estremi inferiori (= intersezioni in $(\mathfrak{z}, \subseteq)$).
4. f^{-1} preserva gli estremi superiori.

Per la controimmagine si ha inoltre

5. f^{-1} preserva anche gli estremi inferiori.

6. $\forall A \subseteq X : f^*(\{A\}) = [f(A)]$, quindi l'immagine di un filtro principale è un filtro principale.

Lo stesso vale per la controimmagine:

7. $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(\{B\}) = [f^{-1}(B)]$.

8. $\forall \varphi \in \mathcal{F}(X) : f^*(\uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{\varphi\}) = \uparrow_{\mathcal{F}(Y)} \{f^*(\varphi)\}$ cioè per ogni filtro φ in X e ogni filtro \mathfrak{z} in Y con $f^*(\varphi) \subseteq \mathfrak{z}$ esiste un filtro φ' con $\varphi \subseteq \varphi'$ e $f^*(\varphi') = \mathfrak{z}$.
(Dimostrazione con $\varphi' := f^{-1}(\mathfrak{z}) \vee \varphi$.)

9. $\forall \nu \in \mathcal{U}(X) : f^*(\nu) \in \mathcal{U}(Y)$, allora l'immagine di un ultrafiltro è un ultrafiltro e con l'applicazione \mathfrak{B} , si ha più precisamente:

10. $\forall \varphi \in \mathcal{F}(X)$ si ha $f^*(\Omega(\varphi)) = \Omega(f^*(\varphi))$.

(Dimostrazione: 2.5.8. implica che per ogni $\nu \in \Omega(f^*(\varphi))$ esiste φ' con $\varphi \subseteq \varphi'$ e $f^*(\varphi') = \nu$ ma per ogni $\nu' \in \Omega(\varphi)$ si vede che $f^*(\nu') = \nu$.)

Sia infine $g : Y \rightarrow Z$ un'altra funzione. In questo modo abbiamo

11. $\forall \varphi \in \mathcal{F}(X) : g^*(f^*(\varphi)) = (g \circ f)^*(\varphi)$.

12. $\forall \eta \in \mathcal{F}(Z) : f^{-1}(g^{-1}(\eta)) = (g \circ f)^{-1}(\eta)$.

13. $\forall \varphi \in IF(X), \forall \chi \in IF(Y)$ e $\forall \eta \in IF(Z)$ si ha:
 $f \varphi$ - χ -continua e $g \chi$ - η -continua $\Rightarrow g \circ f \varphi$ - η -continua.

La composizione di funzioni filtrocontinue è allora filtrocontinua e questo implica

2.6. Corollario e Definizione: Gli insiemi filtrati formano con le funzioni filtrocontinue una categoria concreta (i.e. gli oggetti sono insiemi con una "struttura", i morfismi sono funzioni "compatibili con le strutture" e la composizione dei morfismi è l'usuale composizione delle funzioni). Denotiamo tale categoria con \underline{IF} .

\underline{IF} ha le seguenti proprietà fondamentali:

2.7. Teorema: \underline{IF} è una categoria topologica (nel senso di [He 74,2 Def.A.2], cioè le funzioni costanti non sono necessariamente morfismi).

Dimostrazione: Con l'applicazione di 2.4. si vede facilmente che per ogni situazione iniziale $(f_i : X \rightarrow (X_i, \varphi_i) / i \in I)$ il filtro $\varphi = \bigvee \{ f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I \}$ è iniziale nel senso di [Bou 57, S2] e [He 74,2]. \square

Inoltre si ha che $\bigcup \{ f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I \}$ è una sottobase di φ . φ si chiama il filtro iniziale rispetto a $(f_i : X \rightarrow (X_i, \varphi_i) / i \in I)$. Dualmente si trovano con facilità i filtri finali: φ è finale rispetto a $(f_i : (X_i, \varphi_i) \rightarrow X / i \in I) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \varphi = \{ F \subseteq X : \forall i \in I \text{ si ha } f_i^{-1}(F) \in \varphi_i \} = \bigcap \{ f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I \}.$$

2.8. Esempi di filtri iniziali:

1. Sia (X, φ) un insieme filtrato $A \subseteq X$. $\varphi|_A := \{ A \cap F : F \in \varphi \}$ è il filtro iniziale rispetto alla usuale inclusione $\text{in}_A : A \rightarrow (X, \varphi)$.

2. Sia $((X_i, \varphi_i) / i \in I)$ una famiglia di insiemi filtrati. Il filtro prodotto

$$\bigotimes_{i \in I} \varphi_i := \left[\left\{ \prod_{i \in I'} F_i : I' \subseteq I, I' \text{ è finito e } \forall i \in I' F_i \in \varphi_i \right\} \right] =$$

$= \left[\left\{ \prod_{i \in I} F_i : F_i \in \varphi_i \text{ e } \{ k \in I : F_k = X_k \} \text{ è finito} \right\} \right]$ è il filtro iniziale rispetto alla usuale situazione $(\text{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow (X_j, \varphi_j) / j \in I)$ dove $\prod_{i \in I}$ denota l'usuale

prodotto cartesiano e $pr_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ l'usuale proiezione cioè il prodotto in INS. $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i$ è l'usuale prodotto della famiglia di filtri $\{\varphi_i / i \in I\}$ (vedi p.e. [Bou 51, cap. I, §8, N°8]).

3. Prendendo per gli spazi uniformi la definizione di André Weil abbiamo che le strutture uniformi iniziali sono precisamente filtri iniziali.

4. Anche negli spazi supertopologici una parte delle strutture iniziali è data esattamente dai filtri iniziali (cfr. p.e. [TW 86]).

Dualmente ad 1. e 2. si definiscono i quozienti ed i coprodotti di insiemi filtrati. Diamo altre proprietà importanti di IF:

2.9. Osservazioni:

1. Per ogni insieme X e per ogni φ e $\chi \in IF(X)$ si ha che " \subseteq " è indotto dall'identità $id_X: X \rightarrow Y$ cioè $\chi \subseteq \varphi \Leftrightarrow id_X: (X, \varphi) \rightarrow (Y, \chi)$ è filtrocontinua.

Con questo ordinamento si ha

2. Per ogni insieme X la fibra delle IM-strutture su X ($= IF(X)$) è un insieme, è parzialmente ordinato ed inoltre è un reticolo completo. Ma, per essere una categoria topologica nel senso "forte" cioè nel senso di [He 74, 1], (il vuoto e) i singleton dovrebbero avere una sola IM-struttura. Invece si ha $IF(\{x\}) = \{\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\}$ e questo implica

3. Non tutte le funzioni costanti sono filtrocontinue.

Sia C una categoria topologica e sia A una classe di C-oggetti. Una classe I di C-oggetti è detta "inizialmente densa" in A se per ogni oggetto O di A esiste una situazione iniziale Φ dove tutti i codomini delle funzioni di Φ sono oggetti di I tali che la C-struttura dall'oggetto O è iniziale (in C) rispetto alla situazione Φ . Se questo I contiene un solo oggetto diciamo che questo oggetto è inizialmente denso in A.

Infine vediamo che come in TOP ($=$ la categoria degli spazi topologici e delle funzioni continue) esiste un oggetto che è inizialmente denso in IF:

2.10. Lemma: L'insieme filtrato $(\{0, 1\}, I^*)$ è inizialmente denso in IF.

Dimostrazione: Analogamente alla dimostrazione per lo spazio di Sierpinski $S := (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\})$ (che è inizialmente denso in TOP) abbiamo che

per ogni insieme filtrato (X, φ) φ è iniziale rispetto alla situazione $(\chi_F: X \rightarrow (\{0,1\}, \mathcal{F}) / F \in \varphi)$ dove χ_A denota la funzione caratteristica per ogni $A \subseteq X$ ($\chi_A(x) := 0$, se $x \notin A$ e $\chi_A(x) := 1$, se $x \in A$). \square

Osservazioni finali:

1. La categoria \underline{IF} serve anche a dare un esempio di una categoria concreta in cui per ogni situazione iniziale $\Phi := \{f_i: X \rightarrow (X_i, \varphi_i) / i \in I\}$ esiste una struttura più piccola ξ (rispetto all'ordinamento di 2.9.1.) che fa sì che tutte le funzioni f_i di Φ siano morfismi. Tuttavia la tipica proprietà per ξ che "ogni funzione $g: (Y, \psi) \rightarrow X$ è un morfismo da (Y, ψ) in (X, ξ) se e solo se per ogni $i \in I$, $f_i \circ g$ è un morfismo da (Y, ψ) in (X_i, φ_i) " non è verificata (ξ è perciò detta "quasiiniziale"):

$\underline{I}: \underline{IF} \rightarrow \underline{TOP}$, $\underline{I}(f: (X, \varphi) \rightarrow (Y, \mathcal{G})) := f: (X, \varphi \cup \{\emptyset\}) \rightarrow (Y, \mathcal{G} \cup \{\emptyset\})$ è un funtore ma $\underline{I}(\underline{IF})$ non è una sottocategoria piena (mancano solo le funzioni costanti che non sono filtrocontinue). Se chiamiamo \underline{IFT} la sottocategoria di \underline{TOP} , che ha per oggetti gli oggetti di $\underline{I}(\underline{IF})$ ("filitopologie") e per morfismi i morfismi di \underline{TOP} , cioè le funzioni continue (i.e. che sono $\underline{I}(\underline{IF})$ -morfismi o costanti), abbiamo che \underline{IFT} ha arbitrarie strutture quasiiniziali e, se definiamo dualmente "quasifinale", \underline{IFT} ha anche arbitrarie strutture quasifinali. Ma \underline{IFT} non è completa né cocompleta dunque non ha arbitrarie strutture iniziali (né finali) per cui non è topologica.

2. Con lo stesso ragionamento si vede che la sottocategoria piena (di \underline{IF}) di tutti gli insiemi filtrati (X, φ) , con φ filtro libero ($\Leftrightarrow: \bigcap \varphi = \emptyset$), non può essere isomorfa alla categoria degli spazi bornologici e delle funzioni limitate (cfr. 1.8.6.).

3. Per gli spazi di (pre-)vicinanza ("(pre-)nearness spaces"; v. p.e. [BHR 76] o [Schw 77]), per spazi di prossimità (v. p.e. [Th 73]) o per studiare "concetti generali di aderenza", la nozione di grilli ([Ch 47]) è importante ma la struttura "grilli" non è compatibile con le immagini inverse delle funzioni quanto la struttura "filtro". Di conseguenza non si trovano eleganti e semplici caratterizzazioni per i "grilli iniziali" (cfr. [BHR 76]), per esempio prodotti di grilli. Si vede facilmente che la categoria (= \underline{IG}) in cui si costruiscono questi "grilli iniziali" è isomorfa alla nostra categoria \underline{IF} . Così abbiamo la possibilità di "trasportare" i grilli in \underline{IF} , fare il processo iniziale (p.e. il prodotto) in \underline{IF} e "ritrasportare" il risultato in \underline{IG} . Per prodotti finiti ciò è già stato considerato in [Ro 75].

Letteratura per § 2: [Bou 51], [Bou 57], [Br 81], [Ca 37,1], [Ca 37,2], [Če 66], [Ch 47], [Gä 77], [Gr 60], [He 74,1], [He 74,2], [Nö 54], [Sa 48], [Schm 52], [Schm 53], [Schw 77].

3 - STRUTTURE DI CONVERGENZA PER FILTRI

La "naturale" descrizione per una struttura di convergenza (per filtri, successioni, successioni nel senso di Moore-Smith, ...) è una relazione (p.e. per filtri una relazione $R \subseteq IF(X) \times X$ dove $\varphi R x \Leftrightarrow \varphi$ è convergente ad x).

L'equivalenza con funzioni $K: IF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ o con funzioni $C: X \rightarrow \mathcal{P}(IF(X))$ è ovvia. Per questo lavoro consideriamo l'ultimo concetto menzionato, e, per il momento, senza altre condizioni:

3.1. Definizione: Sia X un insieme e C una funzione da X in $\mathcal{P}(IF(X))$. La coppia (X,C) è detta spazio generale di convergenza (per filtri) e C è detta struttura generale di convergenza (per filtri). Scriviamo $\varphi \rightarrow_C x \Leftrightarrow \varphi \in C(x)$ (o $\varphi \rightarrow x$, se non c'è confusione).

Siano (X,C) e (Y,D) spazi generali di convergenza (per filtri). Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è detta C-D-continua (o $f: (X,C) \rightarrow (Y,D)$ è detta continua) se per ogni $x \in X$ le f-immagini dei filtri convergenti ad x sono filtri convergenti ad $f(x)$ cioè $f^*(C(x)) \subseteq D(f(x))$.

Studiamo solo la convergenza per filtri e perciò evitiamo di specificare "... per filtri". Senza difficoltà si vede il seguente

3.2. Lemma: Per spazi generali di convergenza (X,C) , (Y,D) e (Z,E) e funzioni continue $f: (X,C) \rightarrow (Y,D)$ e $g: (Y,D) \rightarrow (Z,E)$ si ha che anche la composizione $g \circ f: (X,C) \rightarrow (Z,E)$ è continua.

Dunque la classe degli spazi generali di convergenza e le funzioni continue formano una categoria concreta che denotiamo con GFCO. Si vede subito che per ogni insieme X la GFCO-fibra è, con l'ordine indotto dall'identità id_X ,

il reticolo prodotto $\prod_{x \in X} (\mathcal{P}(IF(X)), \supseteq)$; si ha cioè

$id_X: (X,C) \rightarrow (Y,D)$ continua $\Leftrightarrow \forall x \in X: C(x) \subseteq D(x)$ (C è detta "più fine" di D).

Applicando 1.4.1. a $f: IF(X) \rightarrow IF(Y)$ abbiamo che (f^*, f^{-1}) è una connessione di Galois fra $(\mathcal{P}(IF(X)), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(IF(Y)), \subseteq)$ (cfr. 1.8.3.). Questo implica le seguenti utili condizioni per la continuità:

3.3. Lemma: Per spazi generali di convergenza (X, C) , (Y, D) e funzioni continue $f : (X, C) \rightarrow (Y, D)$ sono equivalenti:

- a) f è continua
- b) $\forall x \in X : f^*(C(x)) \subseteq D(f(x))$
- c) $\forall x \in X : C(x) \subseteq f^{-1}(D(f(x)))$
- d) $\forall y \in Y : f^*(C(f^{-1}(y))) \subseteq D(y)$
- e) $\forall y \in Y$ e $\forall x \in f^{-1}(y) : C(x) \subseteq f^{-1}(D(y))$

Prima di studiare sottocategorie di GFCO notiamo

3.4. Teorema: GFCO è una categoria topologica (nel senso di [He 74,2 Def.A.2], cioè le funzioni costanti non sono necessariamente morfismi).

Dimostrazione: Sia data una situazione iniziale $\Phi := \{f_i : X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I\}$ in GFCO. Si vede con l'applicazione di 2.5.11. ($f_i^*(g^*(z)) = (f_i \circ g)^*(z)$) che la funzione $C : X \rightarrow \mathcal{F}(IF(X))$, $C(x) := \{\varphi \in IF(X) : \forall i \in I \text{ si ha } f_i^*(\varphi) \in C_i(f_i(x))\}$ ($\forall x \in X$) è la struttura iniziale rispetto a Φ . \square

Inoltre si ha con il precedente lemma $C(x) = \bigcap \{f_i^*(C_i(f_i(x))) : i \in I\}$ ($\forall x \in X$).

Dualmente si caratterizzano le strutture finali:

Per ogni situazione finale $\Psi := \{f_i : (X_i, C_i) \rightarrow Y / i \in I\}$ in GFCO abbiamo per la GFCO-struttura finale $D : Y \rightarrow \mathcal{F}(IF(Y))$ le descrizioni ($\forall y \in Y$)
 $D(y) = \{z \in IF(Y) : \exists i \in I, \exists x \in f_i^{-1}(y) \text{ e } \exists \varphi \in C_i(x) \text{ tali che } z = f_i^*(\varphi)\} =$
 $= \bigcup \{f_i^*(C_i(f_i^{-1}(y))) : i \in I\}.$

GFCO contiene tutte le classi di spazi di convergenza (per filtri) che sono state introdotte per ampliare TOP. Per esaminare questo aspetto notiamo prima le seguenti proprietà che sono valide per le strutture di convergenza definite da strutture topologiche (X, τ) (un filtro φ converge ad $x \in X$ se e solo se φ è più fine del filtro $\mathcal{V}_\tau(x)$ degli intorni di x):

$$C0) \forall x \in X : x^* \rightarrow_c x.$$

$$C1) \varphi, \gamma \in /F(X) \text{ con } \varphi \rightarrow_c x \text{ e } \varphi \subseteq \gamma \Rightarrow \gamma \rightarrow_c x.$$

$$C2) \varphi \in /F(X) \text{ con } \varphi \rightarrow_c x \Rightarrow \varphi \cap x^* \rightarrow_c x.$$

$$C3) \varphi, \gamma \in /F(X) \text{ con } \varphi \rightarrow_c x \text{ e } \gamma \rightarrow_c x \Rightarrow \varphi \cap \gamma \rightarrow_c x.$$

$$C4) \forall \varphi \in /F(X) \text{ con } \varphi = \wp(X) : \varphi \rightarrow_c x \Leftrightarrow \forall v \in \Omega(\varphi) \text{ si ha } v \rightarrow_c x.$$

$$C5) \Gamma \subseteq /F(X) \text{ con } \Gamma \neq \emptyset \text{ e } \forall \varphi \in \Gamma : \varphi \rightarrow_c x \Rightarrow \bigcap \Gamma \rightarrow_c x.$$

$$C6) \forall \varphi \in /F(X) : \varphi \rightarrow_c x \Leftrightarrow \bigcup_c(x) \subseteq \varphi.$$

Osservazioni: Dato $(X, C) \in \underline{GFCO}$ si vede facilmente

$$1) C0) \text{ e } C1) \Rightarrow \forall x \in X : \wp(X) \rightarrow_c x.$$

$$2) C5) \Rightarrow \forall x \in X \text{ con } C(x) \neq \emptyset \text{ si ha } \bigvee_c(x) = \bigcap C(x) \rightarrow_c x.$$

$$3) C6) \Leftrightarrow \forall x \in X : \bigvee_c(x) = \bigcup_c(x).$$

$$4) \forall x \in X \text{ (con } C(x) \neq \emptyset) \text{ si ha } \bigcup_c(x) = [x^* \cap \tau] = [\bigvee_c(x) \cap \tau].$$

5) Per avere gli stessi "oggetti discreti" (v. in seguito) per C1), C3), C4) e C5) abbiamo considerato anche il caso $C(x) = \emptyset$ per queste condizioni. In

C4) " $\varphi = \wp(X)$ " serve anche per maggiore precisione perchè $\Omega(\wp(X)) = \emptyset$ e per il vuoto è vero sia " $v \rightarrow_c x$ " che " v non converge ad x ". Se modifichiamo C4) in

$$C4_m) \forall \varphi \in /F(X) : \varphi \rightarrow_c x \Leftrightarrow \Omega(\varphi) \subseteq C(x),$$

abbiamo una condizione più elegante ma gli "oggetti discreti" sono diversi.

6) Questa modificazione C4_m) sarà anche più comoda per "PsT" nella definizione 3.5., in quanto C4_m) \Leftrightarrow C4) e C1) (se $C(x) \neq \emptyset$); "C1)" serve solo per aggiungere il filtro $\wp(X)$ nelle definizioni di "PsT" e "C4FCO" (per i punti in cui $C(x) \neq \emptyset$).

Prendendo le condizioni da C0) a C6) è possibile definire le seguenti sottocategorie di GFCO che sono tutte piene e chiuse rispetto ad isomorfismi:

3.5. Definizione: Sia (X, C) un spazio generale di convergenza. La coppia (X, C) (rispettivamente la sottocategoria piena di GFCO che ha per oggetti tutti gli spazi che soddisfano alle condizioni corrispondenti) si chiama

"spazio di CO-convergenza" $\Leftrightarrow (X, C)$ soddisfa C0) ("COFCO"),

- "spazio di C1-convergenza" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C1) ("C1FCO"),
- "spazio di convergenza naturale" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0) e C1) ("FCO"),
- "spazio di convergenza localizzata" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0), C1) e C2) ("LFCO"),
- "spazio di convergenza ideale" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C1) e C3) ("IFCO"),
- "spazio limite" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0), C1) e C3) ("LIM"),
- "spazio di C4-convergenza" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C4) e C1) ("C4FCO"),
- "spazio pseudotopologico" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0), C1) e C4) ("PsT"),
- "spazio di convergenza ideale principale" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0) e C5) ("IPFCO"),
- "spazio pretopologico" $\Leftrightarrow (X,C)$ soddisfa C0), C1) e C5) ("PrT"),
- "spazio topologico" se e solo se esiste una topologia τ tale che la condizione C6) è verificata (per abuso di linguaggio "TOP").

Nota storica: Gli spazi di convergenza naturale sono le "convergence functions" in [Ke 64] o le "convergence relations" in [EW 80], gli spazi di convergenza localizzata sono le "convergence structures" in [Ke 67] e gli spazi limite sono le "Limitierungen" o "Limesräume" in [Ko 54] o [Fi 59] oppure "les espaces quasi-topologiques" per esempio in [Bour 75]. Gli spazi pseudotopologici sono le "pseudo-topologies" in [Ch 48], anche detti spazi di Choquet (ovviamente studiamo qui la convergenza solo per gli ultrafiltri) e, infine, gli spazi pretopologici sono le "semi-topologies" per esempio in [Bour 75] o "neighbourhood spaces" e sono equivalenti ai "closure spaces" di Čech, dove l'operatore di chiusura non è necessariamente idempotente.

Infatti ad ogni spazio pretopologico (X,C) resta associato l'operatore $cl_C : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$, $cl_C(A) := \{ x \in X : \exists \varphi \in C(x), \varphi \neq \emptyset \text{ e } A \in \varphi \}$ che è evidentemente un operatore di chiusura nel senso di Čech ([Če 66]).

cl_C può essere generalizzato a $(X,C) \in \underline{GFCO}$ ponendo

$cl_C(A) := A \cup \{ x \in X : \exists \varphi \in C(x), \varphi \neq \emptyset \text{ e } A \in \varphi \}$ e si vede subito che $cl_C(A) = cl_{cPrT}(A)$ dove "cPrT" è la bicoriflessione in 3.6.a).

Osservazioni: Per i seguenti casi le funzioni $C: X \rightarrow \wp(IF(X))$ possono essere semplificate in alcune delle funzioni:

- 1) $C: X \rightarrow \wp(IU(X)) \cup \{ \emptyset \}$ per C4FCO,
- 2) $C: X \rightarrow \wp(IU(X))$ "per C4mFCO" e per PsT,
- 3) $C: X \rightarrow IF(X) \cup \{ \emptyset \}$ per IPFCO e
- 4) $C: X \rightarrow IF(X)$ per PrT e per TOP.

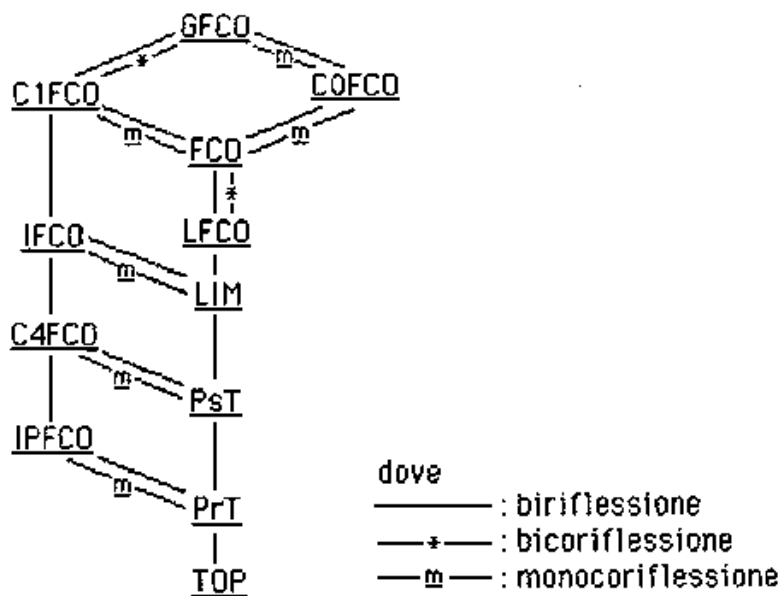
Le nostre definizioni dicono che gli spazi (X, C_x) , dove per ogni punto $x \in X$ $C_x(x) := \emptyset$, sono gli "oggetti discreti" (:= "i più fini") in IPFCO (perchè in C5) è richiesto $\Gamma \neq \emptyset$), C4FCO, IFCO, C1FCO e GFCO. In COFCO gli oggetti discreti sono gli spazi (X, C_x) , dove per ogni $x \in X$ $C_x(x) := \{x^*\}$ e per tutte le altre sottocategorie, cioè FCO, LFCO, LIM, PsT, PrT e TOP, ci sono le topologie discrete ($\forall x \in X : C_{dis}(x) = \{x^*, \emptyset(X)\}$).

Gli "oggetti indiscreti" sono gli stessi per le suddette categorie di convergenza (che denotiamo con "*ConvCat*") cioè gli (X, C) tali che $\forall x \in X$ $C(x) = \emptyset(\mathcal{F}(X))$ (i.e. le topologie caotiche) e questo ha per conseguenza che tutte le seguenti riflessioni sono biriflessioni:

3.6. Teorema:

- a) Ogni categoria di convergenza in $ConvCat := \{ \text{GFCO}, \text{COFCO}, \text{C1FCO}, \text{FCO}, \text{LFCO}, \text{IFCO}, \text{LIM}, \text{C4FCO}, \text{PsT}, \text{IPFCO}, \text{PrT}, \text{TOP} \}$ è biriflessiva in tutte le categorie che la contengono.
- b) i) C1FCO è bitoriflessiva in GFCO.
ii) LFCO è bitoriflessiva in FCO.
- c) i) COFCO è monocoriflessiva in GFCO.
ii) FCO è monocoriflessiva in COFCO.
iii) FCO è monocoriflessiva in C1FCO.
iv) LIM è monocoriflessiva in IFCO.
v) PsT è monocoriflessiva in C4FCO.
vi) PrT è monocoriflessiva in IPFCO.

Da qui abbiamo il diagramma:



Dimostrazione:

Quasi sempre è sufficiente indicare le riflessioni (cioè per queste categorie una modificazione della struttura che aggiunge dei filtri convergenti) oppure indicare le bicoriflessioni (cioè una modificazione della struttura che toglie dei filtri convergenti) o indicare le monocoriflessioni (dove le coriflessioni sono monomorfismi) perchè si ha che i morfismi sono bi-(oppure mono- o epi-)morfismi in GFCO (e in ogni categoria di ConvCat) se e solo se la funzione alla base è un bi-(oppure mono- o epi-)morfismo in INS cioè è bi-(oppure in- o sur-)iettiva.

"a)":

Per mostrare "A biriflessiva in C" (A e C ∈ ConvCat) prendiamo per ogni caso un oggetto (X,C) della sopracategoria C. Per ogni $x \in X$ costruiamo la struttura $C^A(x)$ e si vede facilmente che in tutti i casi $\text{Id}_X: (X,C) \rightarrow (X,C^A)$ è "la" A-biriflessione per (X,C).

- 1) "COFCO bir. GFCO": $C^{\text{CO}}(x) := C(x) \cup \{x^*\}$.
- 2) "FCO bir. CIFCO": $C^{\text{FCO}}(x) := C(x) \cup \{x^*, \emptyset(X)\}$.
- 3) "LIM bir. IFCO": $C^{\text{lim}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} (\{\varphi \cap x^* : \varphi \in C(x)\} \cup \{x^*\})$.
- 4) "PsI bir. C4FCO": $C^{\text{PsI}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} (\{\varphi \cap x^* : \varphi \in C(x)\} \cup \{x^*\})$

(Nota: $\forall \varphi, \chi \in \mathcal{F}(X)$ si ha $\Omega(\varphi \cap \chi) = \Omega(\varphi) \cup \Omega(\chi)$).

- 5) "PrI bir. IPFCO": $C^{\text{PrI}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{ \cap \{ \varphi : \varphi \in C(x) \cup \{x^*\} \} =$
 $= \uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{ \cap C(x) \cap x^* \} (\cap \emptyset = \emptyset(X), \text{ v. 2.2.3.}).$
- 6) "CIFCO bir. GFCO": $C^{\text{CI}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} C(x)$.
- 7) "FCO bir. COFCO": $C^{\text{FCO}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} C(x)$.
- 8) "LFCO bir. FCO": $C^{\text{LFCO}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{ \varphi \cap x^* : \varphi \in C(x) \}$.
- 9) "IFCO bir. CIFCO": $C^{\text{IFCO}}(x) := \{ \cap \Gamma : \Gamma \subseteq C(x), \Gamma \neq \emptyset \text{ e } \Gamma \text{ finito} \}$.
- 10) "LIM bir. LFCO": $C^{\text{LIM}}(x) := \{ \cap \Gamma : \Gamma \subseteq C(x) \text{ e } \Gamma \text{ finito} \}$.

Definiamo per ogni $x \in X$ $\Omega(x) := \cup \{ \Omega(\varphi) : \varphi \in C(x) \}$ cioè l'insieme di tutti gli ultrafiltri che sono C-convergenti ad x, così abbiamo

- 11) "C4FCO bir. IFCO": Se $C(x) \neq \emptyset$ $C^{\text{C4}}(x) := \{ \varphi \in \mathcal{F}(X) : \Omega(\varphi) \subseteq \Omega(x) \}$,
 altrimenti $C^{\text{C4}}(x) := C(x) = \emptyset$ (cfr. osservazioni 5) e 6) prima def. 3.5.).
- 12) "PsI bir. LIM": $C^{\text{PsI}}(x) := \{ \varphi \in \mathcal{F}(X) : \Omega(\varphi) \subseteq \Omega(x) \}$.
- 13) "IPFCO bir. C4FCO": Se $C(x) \neq \emptyset$ $C^{\text{IP}}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{ \cap C(x) \}$

cioè $C^{\text{IP}}(x) = \uparrow_{\mathcal{F}(X)} \{ \bigvee_C(x) \}$, altrimenti $C^{\text{IP}}(x) := C(x) = \emptyset$.

14) "PrI bir. PsI": $C^{PrI}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(x)} \{ \cap C(x) \} = \uparrow_{\mathcal{F}(x)} \{ \bigvee_C(x) \}$ (cfr. oss. 2)).

15) "TOP bir. PrI": $C^{TOP}(x) := \uparrow_{\mathcal{F}(x)} \{ \bigcup_{\tau_c} (x) \}$, dove

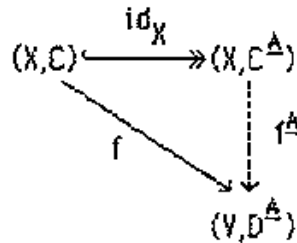
$\tau_c := \{ 0 \subseteq X : x \in 0 \text{ e } \varphi \in C(x) \Rightarrow 0 \in \varphi \}$ e $\bigcup_{\tau_c} (x) = [x^* \cap \tau_c] = [\bigvee_C(x) \cap \tau_c]$

(cfr. osservazione 4) prima def. 3.5.).

Si vede facilmente che τ_c è chiuso rispetto ad unioni arbitrarie e ad intersezioni finite cioè è una topologia, che è (si vede p.e. con "la proprietà universale") la più fine topologia che "contiene" C (i.e. $\varphi \rightarrow_C x \Rightarrow \varphi \rightarrow_{\tau_c} x$).

"La proprietà universale" è:

Per ogni \underline{C} -morfismo $f : (X, C) \rightarrow (Y, D^A)$ esiste un unico morfismo $f^A : (X, C^A) \rightarrow (Y, D^A)$ che rende il seguente diagramma commutativo:



(chiaramente si ha $f : X \rightarrow Y = f^A : X \rightarrow Y$)

Per verificare per i casi da 1) a 14) la suddetta proprietà servono soprattutto:

- i) $f^*(x^*) = f(x)^*$ (2.5.6.)
- ii) $f^*(\mathcal{F}(X)) = \mathcal{F}(Y)$
- iii) f^* è monotona (1.8.2.)
- iv) f^* preserva gli estremi inferiori (2.5.3.)
- v) $f^*(\cap(\varphi)) = \cap(f^*(\varphi))$ (2.5.10.)

Per 15) si ha che, per ogni aperto V , $V \in \tau_{D^{TOP}} \Leftrightarrow \forall y \in V, \forall \mathcal{F} \in D^{TOP}(y) : V \in \mathcal{F}$.

(f continua) $\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(V), \forall \varphi \in C(x) : f^*(\varphi) \in D^{TOP}(f(x))$ e $f(x) \in V$ cioè $V \in f^*(\varphi) \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \varphi$ (con 1.8.2.), ma $\varphi \in C(x)$ e $x \in f^{-1}(V)$ dice che $f^{-1}(V) \in \tau_c$, allora $f : (X, \tau_c) \rightarrow (Y, \tau_{D^{TOP}})$ è continua.

Le composizioni delle biriflessioni completano la dimostrazione per a).

b):

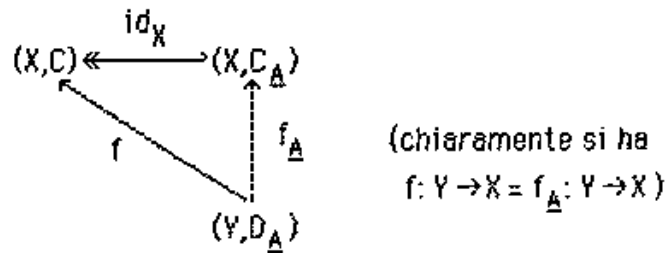
Dualmente ad a) si vede che $\text{id}_X : (X, C_A) \rightarrow (X, C)$ è "la" A -bikoriflessione per ogni $(X, C) \in \underline{C}$, dove A e $\underline{C} \in \text{ConvCat}$, A bikoriflessiva in \underline{C} , se costruiamo $\forall x \in X$ la struttura $C_A(x)$ come segue:

i) "C1FCO bico. GFCO": $C_{C1}(x) := \{ \varphi \in C(x) : \uparrow_{f(x)} \{ \varphi \} \subseteq C(x) \}$ cioè la più grande pila contenuta in $C(x)$ che denotiamo con $]C(x)[_{f(x)}$, perchè applicheremo questo operatore anche in c)ii).

ii) "LFCO bico. FCO": $C_{LFCO}(x) := \{ \varphi \in C(x) : \varphi \cap x^* \in C(x) \}$.

"La proprietà couniversale" è:

Per ogni \underline{C} -morfismo $f : (Y, D_{\underline{A}}) \rightarrow (X, C)$ esiste un unico morfismo $f_{\underline{A}} : (Y, D_{\underline{A}}) \rightarrow (X, C_{\underline{A}})$ che rende il seguente diagramma commutativo:



Per i) sfrutteremo $f^*(\uparrow_{f(x)} \{ \varphi \}) = \uparrow_{f(y)} \{ f^*(\varphi) \}$ (2.5.8.) e

per ii) $f^*(\varphi \cap x^*) = f^*(\varphi) \cap f^*(x^*) = f^*(\varphi) \cap f(x)^*$ (2.5.3. e 2.5.6.).

"c)":

i) "COFCO monocor. GFCO": Se definiamo per $(X, C) \in \underline{GFCO}$ $X_{\bullet} := \{ x \in X : x^* \in C(x) \}$

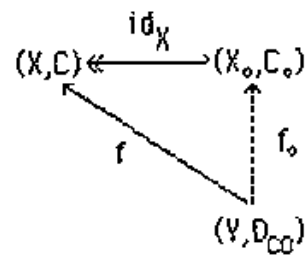
e $\forall x \in X_{\bullet}$ $C_{\bullet}(x) := \{ \varphi|_x : \varphi \in C(x) \text{ e } x \in \varphi \}$ (v. 4.5. e per $\varphi|_x$ cfr. 2.8.1.)

cioè la struttura iniziale rispetto a $in_{x_{\bullet}} : X_{\bullet} \rightarrow (X, C)$ (cfr. dimostrazione di

3.4.), abbiamo "la" monocoriflessione $in_{x_{\bullet}} : (X_{\bullet}, C_{\bullet}) \rightarrow (X, C)$.

Data una funzione continua $f : (Y, D_{\underline{CO}}) \rightarrow (X, C)$ si ha che $\forall y \in Y$ $y^* \in D_{\underline{CO}}(y)$. La continuità implica $f^*(y^*) = f(y)^* \in D(f(y))$, cioè $f(y) \in X_{\bullet}$. Così

$f_{\bullet} : (Y, D_{\underline{CO}}) \rightarrow (X_{\bullet}, C_{\bullet})$, $f_{\bullet}(y) := f(y)$ è ben definita, continua ed è l'unica funzione che rende commutativo il diagramma:



ii) "FCO monocor. COFCO": In analogia a b)i) ed a c)i) dove

$$X_{\text{FCO}} := \{ x \in X : x^* \in]C(x)[_{/F(x)} \} = \{ x \in X : \exists \emptyset(x) \in C(x) \} \text{ e } \forall x \in X_{\text{FCO}}$$

$$C_{\text{FCO}}(x) := \{ \varphi|_{X_{\text{FCO}}} : \varphi \in]C(x)[_{/F(x)} \}.$$

iii) "FCO monocor. CIFCO", iv) "LIM monocor. IFCO", v) "PsT monocor. C4FCO" e vi) "PrT monocor. IPFCO": In analogia a i) dove

$$C_*(x) = \{ \varphi|_{X_*} : \varphi \in C(x) \} \text{ (v. 4.5.).}$$

□

Nota: Con le composizioni delle coriflessioni di b) e c) si ha inoltre

"FCO è monocoriflessiva in GFCO" e

"LFCO è monocoriflessiva in COFCO, CIFCO e GFCO".

Una conseguenza immediata del teorema 3.6. è

3.7. Corollario: Ogni categoria di convergenza in *ConvCat* è una categoria topologica (nel senso di [He 74,2 Def.A.2.] cioè le funzioni costanti non sono necessariamente morfismi).

Ogni Categoria in { FCO, LFCO, LIM, PsT, PrT, TOP } è una categoria topologica nel senso "forte" cioè nel senso di [He 74,1].

Dalla teoria delle categorie abbiamo

3.8. Corollario: Ogni categoria di convergenza in *ConvCat* è chiusa rispetto alle strutture iniziali che sono effettuate in una sopracategoria arbitraria di *ConvCat* (così, per esempio è chiusa rispetto a prodotti e sottospazi formati p.e. in GFCO).

Dualmente si formulano le affermazioni per le strutture finali nelle sottocategorie bi-(o mono-)coriflessive. In generale possiamo formare le strutture finali in GFCO e dopo "trasportare" con il biriflettore (che opera una modificazione della struttura) della categoria scelta perchè i biriflettori preservano i colimiti.

Nel prossimo paragrafo caratterizzeremo le strutture iniziali per tutte le categorie di convergenza che hanno la proprietà C1) cioè per ogni sottocategoria di CIFCO.

Letteratura per § 3: [Br 81], [Ca 37,2], [Ce 66], [Ch 48], [EW 80], [Fi 59], [Gä 77], [HS 79], [Ke 64], [Ke 67], [Ko 54], [Rig 48], [Schw 79], [Schw 81].

4 - "ATOMI" PER STRUTTURE INIZIALI

In questo paragrafo generalizziamo il risultato di [Bou 51, cap.I, §8, N°8] il quale afferma che i filtri degli intorni in spazi topologici prodotto sono i filtri prodotto dei filtri degli intorni delle componenti. Questo implica:

"I filtri convergenti nello spazio prodotto sono "generati" dai filtri prodotto, cioè per una famiglia di spazi topologici $\{(X_i, C_i^{TOP}) / i \in I\}$,

dove $\bigotimes_{i \in I} C_i^{TOP}$ denota la struttura del prodotto

(i.e. $(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} C_i^{TOP}) \cong \prod_{i \in I} (X_i, C_i^{TOP})$), si ha per ogni $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$:

$$\bigotimes_{i \in I} C_i^{TOP}((x_i)_{i \in I}) = \uparrow_{/F(\prod_{i \in I} X_i)} \left\{ \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \forall i \in I \varphi_i \in C_i^{TOP}(x_i) \right\}.$$

Consideriamo i filtri prodotto $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i$ come "atomi" per la struttura del prodotto topologico che vengono da un livello "più basso".

Alla fine del paragrafo 2 (v. 'osservazioni finali 3.'): abbiamo già accennato al fatto che si possono costruire "grilli iniziali" con la categoria \underline{I} . In [BHR 76] si trova anche che questi "grilli iniziali" sono "atomi" per le strutture iniziali della categoria "GRILL" (spazi di avvicinanza determinati da grilli, cfr. [BHR 76], [Ro 75] o [Schw 79]) cioè questi "grilli iniziali" caratterizzano le strutture iniziali. La stessa cosa è valida per le categorie "FMER", "FILTER" e "ConsFCO" in [Schw 79] che sono isomorfe a "GRILL".

Alla fine di questo paragrafo noteremo che anche le topologie iniziali (definite come sistemi di aperti) e perfino i filtri iniziali hanno "atomi" di un livello "più basso".

Nella caratterizzazione delle strutture finali di convergenza (v. dopo la dimostrazione 3.4.) si vede che i filtri finali $f_i^{-1}(\varphi)$ creano (o sono "atomi" per) le strutture finali. Per le strutture iniziali invece non abbiamo una caratterizzazione così elegante. Sviluppiamo l'ultimo assunto per terminare questo lavoro. Con la condizione C1) si ha:

4.1. Lemma: Sia data una situazione iniziale $\Phi := \{f_i: X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I\}$

in $\underline{C1FCO}$, sia C la struttura iniziale rispetto a Φ e sia $x \in X$.

Per ogni $i \in I$ e per ogni filtro φ_i convergente a $f_i(x)$, cioè $\forall \varphi_i \in C_i(f_i(x))$,

si ha che $\varphi := \bigvee \{f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I\}$, il filtro iniziale rispetto a

$\{f_i: X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I\}$, è C-convergente ad x cioè $\varphi \in C(x)$.

Dimostrazione: Ovvio, dato che $\varphi_f \subseteq f_i^{-1}(f_i^{-1}(\varphi_f)) \subseteq f_i^{-1}(\varphi)$. □

Il seguente lemma è valido anche senza C1):

4.2. Lemma: Sia $\Phi := \{f_i : X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I\}$ una situazione iniziale in GFCO, sia C la struttura iniziale rispetto a Φ e sia $x \in X$. Per ogni filtro $\varphi \in C(x)$ esiste un filtro $\varphi_i \in C_i(f_i(x))$ per ogni $i \in I$ dove il filtro iniziale rispetto a $\{f_i : X \rightarrow (X_i, \varphi_i) / i \in I\}$

1) è contenuto in φ cioè $\bigvee \{f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I\} \subseteq \varphi$ e

2) è convergente: $\bigvee \{f_i^{-1}(\varphi_i) : i \in I\} \in C(x)$.

Dimostrazione: Ovvio, dato che $\varphi_i := f_i^{-1}(\varphi) \subseteq f_i^{-1}(\varphi)$ e $f_i^{-1} \circ f_i^{-1} \circ f_i^{-1} = f_i^{-1}$. □

Il Lemma 4.1. dice allora che i filtri iniziali sono convergenti se prendiamo C1)-strutture e il lemma 4.2. mostra che i filtri iniziali sono i più piccoli filtri che sono convergenti. Così abbiamo

4.3. Teorema: Sia $\Phi := \{f_i : X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I\}$ una situazione iniziale in C1FCO e sia C la struttura iniziale rispetto a Φ .

Con questi dati risulta per ogni $x \in X$:

1) $C(x) = \uparrow_{/F(x)} \{ \varphi : \forall i \in I \exists \varphi_i \in C_i(f_i(x)) \text{ ove } \varphi \text{ è il filtro iniziale rispetto a } \{f_i : X \rightarrow (X_i, \varphi_i) / i \in I\} \}$.

2) $C(x) = \uparrow_{/F(x)} \{ \bigvee \{ \xi(i) : i \in I \} : \xi \in \prod_{i \in I} f_i^{-1}(C_i(f_i(x))) \}$.

3) $C(x) = \bigcap \{ \uparrow_{/F(x)} f_i^{-1}(C_i(f_i(x))) : i \in I \}$.

Nota: Nella caratterizzazione delle strutture di convergenza iniziali (v. dopo la dimostrazione 3.4.) abbiamo usato le controimmagini f_i^{-1} ma qui, in 2) e 3), le immagini $f_i^{-1} : /F(X_i) \rightarrow /F(X)$ in 1.8.2. e 3.

Dimostrazione: 1) è ovvio con i due precedenti lemma e 2) segue dalla caratterizzazione dei filtri iniziali nella dimostrazione 2.7.

1) \Leftrightarrow 3): La caratterizzazione delle strutture iniziali dopo la dimostrazione

3.4. Implica che per ogni $x \in X$ $C(x) = \bigcap \{ f_i^{-1}(C_i(f_i(x))) : i \in I \}$

e la nota 1.8.3. implica che per i settori superiori $C_i(f_i(x))$ e per ognuna delle funzioni f_i^{-1} risulta $f_i^{-1}(C_i(f_i(x))) = \uparrow_{/F(x)} f_i^{-1}(C_i(f_i(x)))$. □

(L'equivalenza di 2) e 3) può essere generalizzata per reticoli completi:
Lemma: Sia L un reticolo completo. Per ogni sistema di sottoinsiemi $\alpha \subseteq \wp(L)$ si ha $\bigcap \{ \uparrow_L A : A \in \alpha \} = \uparrow_L \{ \bigvee \{ \xi(A) : A \in \alpha \} : \xi \in \prod_{A \in \alpha} A \} .$)

Per le categorie IPFCO, PrT e TOP si vede facilmente:

4.4. Corollario: Sia $\Phi := \{ f_i : X \rightarrow (X_i, C_i) / i \in I \}$ una situazione iniziale in IPFCO (oppure PrT o TOP) e sia C la struttura iniziale rispetto a Φ .

1. In IPFCO si ha $\forall x \in X$ con $C(x) \neq \emptyset$ (cioè se $\forall i \in I \quad C_i(f_i(x)) \neq \emptyset$):

$$V_C(x) = \bigvee \{ f_i^{-1}(\bigvee_{C_i}(f_i(x))) : i \in I \} = \bigvee \{ f_i^{-1}(\bigcap C_i(f_i(x))) : i \in I \}$$

e così $C(x) = \uparrow_{/F(X)} \{ V_C(x) \}$ (altrimenti $C(x) = \emptyset$).

2. In PrT si ha $\forall x \in X: \quad V_C(x) = \bigvee \{ f_i^{-1}(\bigvee_{C_i}(f_i(x))) : i \in I \}.$

3. In TOP si ha $\forall x \in X: \quad U_C(x) = \bigvee \{ f_i^{-1}(\bigcup_{C_i}(f_i(x))) : i \in I \}.$

I filtri degli intorni negli spazi iniziali sono allora filtri iniziali. Studiamo per finire i casi particolari "sottospazio" e "prodotto":

4.5. Lemma: Per $(X, C) \in \underline{GFCO}$, $A \subseteq X$ e C_A la struttura iniziale rispetto a

$\text{in}_A : A \rightarrow (X, C)$ si ha per ogni $a \in A: \quad C_A(a) = \{ \varphi|_A : \varphi \in C(a) \text{ e } A \in \varphi \}.$

Se $C(a)$ è un settore superiore in $(/F(X), \subseteq)$ (p.e. $(X, C) \in \underline{CIFCO}$) abbiamo in più $C_A(a) = \{ \varphi|_A : \varphi \in C(a) \}.$

Dimostrazione: Segue ovviamente da 2.5.1. ($\text{in}_A : A \rightarrow X$ è iniettiva). \square

Come all'inizio di questo paragrafo denotiamo con $\bigotimes_{i \in I} C_i$ la struttura del prodotto di una famiglia $\{ (X_i, C_i) / i \in I \}$ di GFCO, cioè $(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} C_i) \cong \prod_{i \in I} (X_i, C_i^{\text{TOP}})$ e $\bigotimes_{i \in I} C_i$ è la GFCO-struttura iniziale rispetto a l'usuale situazione $(\text{pr}_j; \prod_{i \in I} X_i \rightarrow (X_j, C_j) / j \in I)$. Con questa scrittura abbiamo

4.6. Corollario: Per la struttura prodotto, $\bigotimes_{i \in I} C_i$, di una famiglia $\{(X_i, C_i) / i \in I\}$ di GFCO si ha per ogni $\varphi \in /F(\prod_{i \in I} X_i)$ e per ogni $x \in \prod_{i \in I} X_i$:

1. $\varphi \in \bigotimes_{i \in I} C_i(x) \Leftrightarrow \forall i \in I \quad pr_i(\varphi_i) \in C_i(pr_i(x)).$

2. Se $\bigotimes_{i \in I} C_i(x)$ è un settore superiore in $(/F(\prod_{i \in I} X_i), \subseteq)$ si ha

$$\varphi \in \bigotimes_{i \in I} C_i(x) \Leftrightarrow \forall i \in I \quad \exists \varphi_i \in C_i(pr_i(x)) \text{ tali che } \bigotimes_{i \in I} \varphi_i \subseteq \varphi.$$

3. Se la famiglia $\{(X_i, C_i) / i \in I\}$ è di CIFCO e se ogni $C_i(pr_i(x)) \neq \emptyset$ si ha

$$\bigotimes_{i \in I} C_i(x) = \uparrow_{/F(\prod_{i \in I} X_i)} \left\{ \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \forall i \in I \quad \varphi_i \in C_i(pr_i(x)) \right\}.$$

Dimostrazione: Segue ovviamente da 4.2.1), 4.3.1) e dal fatto che "pr_i suriettiva $\Rightarrow pr_i(\varphi_i) = pr_i^{-1}(\varphi_i)$ ". □

Prima di usare le suddette descrizioni vogliamo menzionare che anche i filtri iniziali hanno "atomi":

Nota: Indichiamo con IS la categoria concreta che ha per oggetti coppie (X, S) , dove X è un insieme e S un sottoinsieme di X , e gli IS-morfismi, $f : (X, S) \rightarrow (Y, T)$, sono applicazioni $f : X \rightarrow Y$ tali che $f(S) \subseteq T$. (1.4.1. dice $f(S) \subseteq T \Leftrightarrow S \subseteq f^{-1}(T)$.)

In questa categoria ogni insieme X ha una fantastica fibra: $(\wp(X), \supseteq)$! Si vede facilmente che IS è una categoria topologica "nel senso debole" e ha tutte le "belle" proprietà ma, anche in questa categoria, le costanti non sono necessariamente morfismi. Nelle definizioni si vede che le IS-strutture iniziali sono "atomi" per esempio per filtri iniziali o topologie (definite con gli aperti) iniziali.

Evidentemente la categoria IS è isomorfa alla sottocategoria piena di IF dove le strutture sono filtri principali ($f(S) \subseteq T \Leftrightarrow [T] \subseteq f^*([S]) \Leftrightarrow f^*([T]) \subseteq [S]$).

Applicazioni:

1) Gli "atomi" per le strutture iniziali servono per esempio a trovare (sotto-)classi che sono inizialmente dense (cfr. 2.10.). Così abbiamo la possibilità di mostrare, utilizzando 2.10., che lo spazio di Sierpinski S è inizialmente denso in TOP o l'analogo per PrT. (Cfr. [Bour 75], [BS 87] o [Schw 86, 1])

2) Le classi inizialmente dense sono per esempio importanti per gli operatori di chiusura che sono costruiti con equalizzatori e queste sono strettamente legate alle caratterizzazioni degli epimorfismi ed all'esame del 'co-well-poweredness' (cfr. p.e. [Gi 85], [DG 87]). Per ulteriori risultati in questa direzione ci riferiamo a [BG 87].

3) Gli "atomi" per le strutture iniziali sono inoltre utilizzati per vedere quando le strutture dei domini dei morfismi sono iniziali, in particolare quando loro sono iniziali e contemporaneamente le strutture dei codomini sono finali (p.e. i quozienti).

Nelle dimostrazioni per le caratterizzazioni degli epimorfismi (v. 2) precedente) si usa molto la costruzione

$$\begin{array}{c}
 (X, C) \xrightarrow{\quad k_1 \quad} \\
 \searrow \\
 (X, C) \mu (X, C) \xrightarrow{\quad q_M \quad} (X \mu_M X, C_M) \xrightarrow{\quad pr \quad} (X, C) \\
 \swarrow \\
 (X, C) \xrightarrow{\quad k_2 \quad}
 \end{array}$$

dove (X, C) è un oggetto, " μ " è il coprodotto, k_1 e k_2 sono le immersioni canoniche (i.e. $k_i(x) := (x, i)$ per $i = 1, 2$), $M \subseteq X$, q_M è la funzione quoziente che identifica i punti di M (cioè $q_M((x, 1)) := q_M((x, 2)) := x \Leftrightarrow x \in M$; $q_M((x, 1)) := (x, 1)$ e $q_M((x, 2)) := (x, 2) \Leftrightarrow x \notin M$ e C_M denota la struttura quoziente) e pr è la proiezione definita da $pr(x) := x$ se $x \in M$ e $pr((x, i)) := x$ se $x \notin M$.

Per gli spazi di convergenza si vede subito con i filtri iniziali se la struttura nel coprodotto è anche iniziale rispetto a $q_M: X \mu X \rightarrow (X \mu_M X, C_M)$ o meno (dove $X \mu X$ denota il coprodotto in INS).

4) Le classi inizialmente dense sono anche importanti per i quasitopoi, perchè esistono comode caratterizzazioni se una categoria è cartesiana chiusa (v. p.e. [Schw 83] e [Schw 84]) e anche se una categoria è ereditaria chiusa (per la definizione di "ereditaria" cfr. p.e. [He 86,1] e [He 86,2]; le caratterizzazioni con classi che sono inizialmente dense si trovano in [Schw 86,1] e [Schw 86,2]). Risultati in questa direzione potrebbero essere pubblicati in seguito ([BS 87], in preparazione).

Nota: In corrispondenza al 4) precedente vogliamo solo ricordare i seguenti sviluppi della categoria TOP:

- l'involuppo ereditario e topologico ("hereditary topological hull") è PrT.

- l'involuppo cartesiano chiuso e topologico ("cartesian closed topological hull") è la categoria degli "spazi di Antoine" (v. in seguito) e delle funzione continue e
- il quasitopos-involuppo topologico ("quasitopos topological hull"), cioè il più piccolo universo topologico (\Leftrightarrow categoria topologica, cartesiana chiusa e ereditaria chiusa), è PsT, la categoria degli spazi di Choquet.

Una caratterizzazione per gli "spazi di Antoine" si trova per esempio in [Bour 75] e [Bour 76]:

(X, α) è un spazio di Antoine se e solo se

- i) $(X, \alpha) \in \text{PsT}$
- ii) $\varphi \rightarrow_{\alpha} x \Rightarrow \varphi^* \rightarrow_{\alpha} x$
- iii) $\varphi \rightarrow_{\alpha} x \Rightarrow \alpha^{-1}(\varphi)$ è chiuso rispetto alla topologia indotta da α .

La condizione i) dice che (X, α) è uno spazio di Choquet;

la condizione iii) è valida anche per ogni filtro in X , e significa che per ogni filtro φ in X l'insieme dei punti ai quali φ converge è chiuso rispetto alla topologia indotta dalla "strutture di convergenza di Antoine":
cioè $\text{cl}_{\alpha}(\alpha^{-1}(\varphi)) = \alpha^{-1}(\varphi)$.

L'operatore " $*$ " nella condizione ii) segue in un certo senso da una dualizzazione dell'operatore di chiusura cl_{α} (v. nota storica dopo definizione 3.5.):

$$\begin{aligned} \text{per ogni punto } x \in X \text{ si ha } \text{cl}_{\alpha}(\{x\}) &= \{y \in X : \exists \varphi \in \mathcal{C}(y), \varphi \neq \emptyset(X) \text{ e } \{x\} \in \varphi\} = \\ &= \{y \in X : x^* \rightarrow_{\alpha} y\} \end{aligned}$$

cioè la chiusura dei singleton è completamente definita dagli ultrafiltri principali. Cambiando x e y nell'ultimo membro, abbiamo l'operatore " $*$ ":

$$x^* := \{y \in X : y^* \rightarrow_{\alpha} x\} = \{y \in X : x \in \text{cl}_{\alpha}(\{y\})\}$$

$$A^* := \bigcup \{x^* : x \in A\} = \{y \in X : \exists x \in A \ y^* \rightarrow_{\alpha} x\} = \{y \in X : A \cap \text{cl}_{\alpha}(\{y\}) \neq \emptyset\}$$

$$\varphi^* := [\{F^* : F \in \varphi\}]$$

per ogni punto $x \in X$, per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ e per ogni filtro $\varphi \in \mathcal{F}(X)$.

Letteratura e ulteriori risultati relativi agli spazi di Antoine si trovano per esempio nei lavori già menzionati [Bour 75] e [Bour 76].

Letteratura per § 4: [BHR 76], [Bou 51], [Br 81]

BIBLIOGRAFIA

- [Ben 49] Benado, M.: Nouveaux théorèmes de décomposition et d'intercalation à la normalité α , C. r. Acad. Sci., Paris 228 (1949), 529 - 531
- [BHR 76] Bentley, H.L., Herrlich, H., Robertson, W.A.: Convenient categories for topologists, Comment. Math. Univ. Carolinae 17 (1976), 207 - 227
- [Bir 40] Birkhoff, G.: Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, New York, 1940
- [Bir 67] Birkhoff, G.: Lattice theory, third edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, New York, 1967
- [BJ 72] Blyth, T.S., Janowitz, M.F.: Residuation theory, Pergamon Press, Oxford, 1972
- [Bou 51] Bourbaki, N.: Topologie générale, chap. I, II, Hermann, Paris, 1951
- [Bou 57] Bourbaki, N.: Théorie des ensembles, chap. IV, Hermann, Paris, 1957
- [Bou 75] Bourdaud, G.: Espaces d'Antoine et semi-espaces d'Antoine, Cahiers Topol. Géom. Diff. 16 - 2 (1975), 107 - 133
- [Bou 76] Bourdaud, G.: Some cartesian closed topological categories of convergence spaces, in: Categ. Topology (Proc. Conf. Mannheim 1975), Lect. Notes Math. 540 (1976), 93 - 108
- [Br 81] Brandt, R.D.: Initiale Filter und Konvergenzstrukturen, Tesi Università Hannover, 1981
- [BG 87] Brandt, R.D., Giuli, E.: Epimorphisms in (sub-)categories of convergence spaces, In preparazione
- [BS 87] Brandt, R.D., Schwarz, F.: Hereditary topological categories and applications to classes of convergence spaces, In preparazione (Baku 1987)
- [Ca 37,1] Cartan, H.: Théorie des filtres, C. r. Acad. Sci., Paris 205 (1937), 595 - 598
- [Ca 37,2] Cartan, H.: Filtrés e ultrafiltrés, C. r. Acad. Sci., Paris 205 (1937), 777 - 779
- [Če 66] Čech, E.: Topological spaces (Revised by Z. Frolík and M. Katětov), Academia, Prague 1966
- [Ch 47] Choquet, G.: Sur les notions de filtre et de grille, C. r. Acad. Sci., Paris 224 (1947), 171 - 173
- [Ch 48] Choquet, G.: Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. (N. S.) 23 (1948), 57 - 112
- [DG 87] Dikranjan, D., Giuli, E.: Epimorphisms and absolutely closed objects in categories of convergence spaces, in preparazione
- [Eve 44] Everett, C.J.: Closure operators and Galois theory in lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 514 - 525
- [EW 80] Erné, M., Weck, S.: Order convergence in lattices, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), 805 - 818
- [F1 59] Fischer, H.R.: Limesräume, Math. Annalen 137 (1959), 269 - 303
- [Gä 77] Gähler, W.: Grundstrukturen der Analysis, Band I, Akademie-Verlag, Berlin, 1977
- [GHKLS 80] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M., Scott, D.S.: A compendium of continuous lattices, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980
- [Gi 86] Giuli, E.: Epimorfismi e co-well-poweredness di sottocategorie epiriflessive di TOP, Rend. Circolo Mat. Palermo, Suppl. Serie II 12 (1986), 65 - 86
- [BG 87] Giuli, E., Brandt, R.D.: vedi sopra
- [DG 87] Giuli, E., Dikranjan, D.: vedi sopra
- [Gr 60] Grimsen, G.: Gefilterte Summation von Filtern und Iterierte Grenzprozesse I, Math. Annalen 141 (1960), 318 - 342

- [He 68] Herrlich, H.: Topologische Reflexionen und Coreflexionen, Lect. Notes Math. 76, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1968
- [He 74,1] Herrlich, H.: Cartesian closed topological categories, Math. Coll. Univ. Cape Town 2 (1974), 1 - 16
- [He 74,2] Herrlich, H.: Topological structures, Math. Centre Tract 52 (1974), 59 - 122
- [He 74,3] Herrlich, H.: Topological functors, Gen. Topol. Appl. 4 (1974), 125 - 142
- [BHR 76] Herrlich, H., Bentley, H.L., Robertson, W.A.: vedi sopra
- [He 86,1] Herrlich, H.: Topological improvements of categories of structured sets, Topol. Appl., da pubblicare
- [He 86,2] Herrlich, H.: Hereditary topological constructs, Proc. Sixth Prague Topol. Symp. (Aug. 1986), Heldermann Verlag, Berlin, da pubblicare
- [HS 79] Herrlich, H., Strecker, G.E.: Category theory, 2nd edition, Sigma Series Pure Math. 1, Heldermann Verlag, Berlin, 1979
- [GHKLMS 80] Hofmann, K.H., Gierz, G., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M., Scott, D.S.: v. sopra
- [H-N 70] Hogbe-Nlend, H.: Les fondements de la bornologie moderne I, Départ. Math. Bordeaux, 1970
- [BJ 72] Janowitz, M.F., Blyth, T.S.: vedi sopra
- [GHKLMS 80] Keimel, K., Gierz, G., Hofmann, K.H., Lawson, J.D., Mislove, M., Scott, D.S.: v. sopra
- [Ke 64] Kent, D.C.: Convergence functions and their related topologies, Fund. Math. 54 (1964), 125 - 133
- [Ke 67] Kent, D.C.: On convergence groups and convergence uniformities, Fund. Math. 60 (1967), 213 - 222
- [Ko 54] Kowalsky, H.-J.: Limesräume und Komplettierung, Math. Nachr. 12 (1954), 301 - 340
- [Ko 61] Kowalsky, H.-J.: Topologische Räume, Birkhäuser Verlag, Basel, 1961
- [GHKLMS 80] Lawson, J.D., Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Mislove, M., Scott, D.S.: v. sopra
- [McL 71] MacLane, S.: Categories for the working mathematician, Springer, New York, 1971
- [GHKLMS 80] Mislove, M., Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Scott, D.S.: v. sopra
- [Nei 75] Nel, L.D.: Initially structured categories and cartesian closedness, Canadian J. Math. 27 (1975), 1361 - 1377
- [Nö 48] Nöbeling, G.: Topologie der Vereine und Verbände, Arch. Math. 1 (1948), 154 - 159
- [Nö 54] Nöbeling, G.: Analytische Topologie, Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1954
- [Ore 42] Ore, O.: Theory of equivalence relations, Duke Math. J. 9 (1942), 573 - 627
- [Ore 44] Ore, O.: Galois connexions, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 493 - 513
- [Pic 52] Pickart, G.: Bemerkungen über Galois-Verbindungen, Arch. Math. 3 (1952), 285 - 289
- [Pr 72] Preuß, G.: Allgemeine Topologie, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1972
- [Rig 48] Riguet, J.: Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. Math. France 76 (1948), 114 - 155
- [Ro 75] Robertson, W.A.: Convergence as a nearness concept, Thesis, Carleton University Ottawa, 1975
- [BHR 76] Robertson, W.A., Bentley, H.L., Herrlich, H.: vedi sopra
- [Sa 48] Samuel, P.: Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 100 - 132
- [Schm 52] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie I, Math. Nachr. 7 (1952), 359 - 378

- [Schm 53] Schmidt, J.: Beiträge zur Filtertheorie II, *Math. Nachr.* 10 (1953), 197 - 232
- [Schm 74] Schmidt, J.: Each join-completion of a partially ordered set is the solution of a universal problem, *J. Austr. Math. Soc.* 17 (1974), 406 - 413
- [Schw 77] Schwarz, F.: Nearnesskategorien und Konvergenzkategorien I: Nearnessstrukturen, *Institut für Mathematik* 63, Technische Universität Hannover, 1977
- [Schw 79] Schwarz, F.: Connections between convergence and nearness, in: *Categ. Topology, Lect. Notes Math.* 719 (1979), 345 - 357
- [Schw 80] Schwarz, F.: Cartesian closedness, exponentiality, and final hulls in (pre)topological spaces, *Institut für Mathematik* 116, Technische Universität Hannover, 1980
- [Schw 81] Schwarz, F.: "Continuity" properties in lattices of topological structures, in: *Continuous lattices (Proc. Conf. Bremen 1979)*, *Lect. Notes Math.* 871, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1981, 335 - 347
- [Schw 83] Schwarz, F.: Powers and exponential objects in initially structured categories and applications to categories of limit spaces, *Quaest. Math.* 6 (1983), 227 - 254
- [Schw 84] Schwarz, F.: Product compatible reflectors and exponentiability, in: *Categ. Topology (Proc. Conf. Toledo 1983)*, *Sigma Series Pure Math.* 5, Heldermann Verlag, Berlin 1984, 505 - 522
- [Schw 86,1] Schwarz, F.: Hereditary topological categories and topological universes, *Quaest. Math.* 10 (1986), in stampa
- [Schw 86,2] Schwarz, F.: Heredity in topological and monotopological categories, preprint
- [Schw 87] Schwarz, F.: Heredity in categories of convergence spaces, in preparazione
- [BS 87] Schwarz, F., Brandt, R.D.: vedi sopra
- [GHKLMS 80] Scott, D.S., Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M.: v. sopra
- [HS 79] Strecker, G.E., Herrlich, H.: vedi sopra
- [Th 73] Thron, W.J.: Proximity structures and grills, *Math. Annalen* 206 (1973), 35 - 62
- [TW 86] Tozzi, A., Wyler, O.: On categories of supertopological spaces, preprint
- [EW 80] Weck, S., Erné, M.: vedi sopra
- [Wy 71,1] Wyler, O.: On the categories of general topology and topological algebra, *Arch. Math.* 22 (1971), 7 - 17
- [Wy 71,2] Wyler, O.: Top categories and categorical topology, *Gen. Topol. Appl.* 1 (1971), 17 - 28
- [Wy 79] Wyler, O.: Function spaces in topological categories, in: *Categ. Topology, Lect. Notes Math.* 719 (1979), 411 - 420
- [TW 86] Wyler, O., Tozzi, A.: vedi sopra



Indirizzo dell'autore:

Rolf D. Brandt

Università degli Studi dell'Aquila, Italia
 Hochschule Hildesheim, Germania occidentale
 Universität Bremen, Germania occidentale